Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Φροντιστηριακές ασκήσεις #3 Μάρτιος 2016, Ελάχιστο και χαρακτηριστικό πολυώνυμο

1. Ποιές συνθήκες πρέπει να πληρούν οι αριθμοί a, b, c, d, e, f έτσι ώστε η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ με τύπο

$$T(x, y, z, w) = (3x + ay + bz + cw, 3y + dz + ew, 4z + fw, 4w)$$

να είναι διαγωνίσιμη;

2. Ποιές συνθήκες πρέπει να πληρούν οι a, b ώστε η γραμμική απεικόνιση με τύπο

$$T(x, y, z) = (2x, 2y + az, 3x + bz)$$

να είναι διαγωνίσιμη;

3. Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Με την βοήθεια του Θεωρήματος Cayley-Hamilton, να υπολογίσετε τον πίνακα

$$D = C^{23} - 3C^{22} - 4C^{21} + 10C^{20} - C^6 + 3C^5 + 4C^4 - 11C^3 + 4C^2 + 5C + I_3.$$

4. Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

και στη συνέχεια

- με την βοήθεια του θεωρήματος των Cayley-Hamilton δείξτε ότι $E^n = E^{n-2} + E^2 - I_3$ για κάθε φυσικό $n \geq 3$,
- υπολογίστε τον πίνακα E^{100},
- βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα E.

5. Βρείτε πίνακες X και Y τέτοιους ώστε

$$X^2 = Y^3 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Φροντιστηριακές ασκήσεις #3.

Ασκηση 1.

$\chi_T(x) = \det([T]_\varepsilon^\varepsilon - xI)$ όπου $\varepsilon = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$

$$[T]_\varepsilon^\varepsilon = \begin{pmatrix} 3 & \alpha & b & c \\ 0 & 3 & d & e \\ 0 & 0 & 4 & f \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$T(1,0,0,0) = (3,0,0,0) \to 1^{\eta}$ στήλη
$T(0,1,0,0) = (\alpha,3,0,0) \to 2^{\eta}$ στήλη
$T(0,0,1,0) = (b,d,4,0) \to 3^{\eta}$ στήλη
$T(0,0,0,1) = (c,e,f,4) \to 4^{\eta}$ στήλη

$$\chi_T(x) = \begin{vmatrix} 3-x & \alpha & b & c \\ 0 & 3-x & d & e \\ 0 & 0 & 4-x & f \\ 0 & 0 & 0 & 4-x \end{vmatrix} = (3-x)^2(4-x)^2(x-3)^2(x-4)^2$$

Ιδιοτιμές 3 με αλγεβρική πολλαπλότητα 2
4 '' '' 2

T διαγωνοποιήσιμος => γεωμετρική πολλαπλότητα = αλγεβρική $\forall$ ιδιοτιμή
δηλαδή $\dim V(3) = 2$ και $\dim V(4) = 2$

$$[T]_\varepsilon^\varepsilon = \begin{pmatrix} 3 & a & b & c \\ 0 & 3 & d & e \\ 0 & 0 & 4 & f \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$V(3)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\;\middle|\;\left([T]_{\varepsilon}^{\varepsilon}-3I\right)\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\;\middle|\;\begin{pmatrix}0&\alpha&b&c\\0&0&d&e\\0&0&1&f\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\} \qquad AX=0$$

Η διάσταση του χώρου των λύσεων ενός ομογε-νούς συστήματος $n-\text{rank}A$

$4-\text{rank}(A-3I)=2$

Άρα $\text{rank}(A-3I)=2$

Αφαιρώ $\cdot(-1)$ -1 → άρα για $\alpha=0$ με γραμμοπράξεις.

$$\text{rank}\begin{pmatrix}0&\alpha&b&c\\0&0&d&e\\0&0&1&f\\0&0&0&1\end{pmatrix}=2 \Rightarrow \alpha=0$$

Με γραμμοπράξεις $\begin{pmatrix}0&\alpha&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=0$

άρα για την ισότητα ισχύει $\alpha=0$.

$$V(4)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\left([T]_{\varepsilon}^{\varepsilon}-4I\right)\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&\alpha&b&c\\0&-1&d&e\\0&0&0&f\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$4-\text{rank}(A-4I)=2 \Rightarrow \text{rank}(A-4I)=2$

$$\text{rank}\begin{pmatrix} -1 & a & b & c \\ 0 & -1 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & -b & -c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

άρα για $f=0$

- Άρα για $\alpha=0$, $f=0$ η απεικόνιση T είναι διαγω-
νίσιμη

Φροντιστηριακές ασκήσεις #3

Άσκηση 3

$$\chi_C(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 3 \\ -1 & 0-x & 4 \\ 0 & 2 & 2-x \end{vmatrix} = (1-x)(-x)(2-x) - 6 - 8(1-x) + 2(2-x) =$$

$$= -x(x-2)(x-1) - 6 - 8 + 8x + 4 - 2x$$

$$= -x(x^2-3x+2) - 10 + 6x$$

$$= -x^3 + 3x^2 - 2x - 10 + 6x$$

$$= -x^3 + 3x^2 + 4x - 10$$

$-C^3 + 3C^2 + 4C - 10I_{3\times3} = O_{3\times3}$ Cayley-Hamilton

$$D = \underbrace{C^{23} - 3C^{22} - 4C^{21} + 10C^{20}} - C^6 + 3C^5 + 4C^4 - 11C^3 + 4C^2 + 5C + I_3$$

$$= C^{20}\underbrace{(C^3 - 3C^2 - 4C + 10I_3)}_{0} + C^3\underbrace{(-C^3 + 3C^2 + 4C - 10I_3)}_{0} - C^3 + 4C^2 + 5C + I_{3\times3}$$

$D = -C^3 + 4C^2 + 5C + I_3$

$D = -3C^2 - 4C + 10I_3 + 4C^2 + 5C + I_3$

$D = C^2 + C + 11I_3$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} = \ldots$$

Ασκηση 4

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_E(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 1 & -x & 1 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = (-1)^1(1-x)\begin{vmatrix} -x & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} + 0 + 0 =$$

$$= (1-x)(x^2-1) = x^2 - 1 - x^3 + x = -x^3 + x^2 + x - 1$$

Cayley-Hamilton $\chi_E(E) = O_{3\times3}$

άρα $-E^3 + E^2 + E - I_3 = O_{3\times3}$

i) Μαθηματική Επαγωγή

$n=3$ $\quad -E^3 + E^2 + E - I_3 = O_{3\times3}$

$\Rightarrow E^3 = E + E^2 - I_3$ ισχύει

Εστω ότι ισχύει για $n=k$ (1). $E^k = E^{k-2} + E^2 - I_3$

$n = k+1$

$E^{k+1} = E \cdot E^k = E \cdot (E^{k-2} + E^2 - I_3) = E^{k-1} + E^3 - E \overset{\text{από}}{\underline{\text{Cayley-Hamilton}}}$

$E^{k-1} + E + E^2 - I - E = E^{k-1} + E^2 - I_3$

Αρα ισχύει για κάθε $n \geq 3$.

ii) $\mathcal{E}^{100} =$

$\mathcal{E}^3 = \mathcal{E}^2 + \mathcal{E} - I_3$ από Θεώρημα Cayley-Hamilton

$\mathcal{E}^4 = \mathcal{E}\cdot\mathcal{E}^3 = \mathcal{E}(\mathcal{E}^2+\mathcal{E}-I) = \mathcal{E}^3+\mathcal{E}^2-\mathcal{E} = \mathcal{E}^2+\mathcal{E}-I+\mathcal{E}^2-I =$

$\Rightarrow \mathcal{E}^4 = 2\mathcal{E}^2 - I$

$\mathcal{E}^6 = \mathcal{E}^4+\mathcal{E}^2-I = 2\mathcal{E}^2-I+\mathcal{E}^2-I = 3\mathcal{E}^2-2I$

$\mathcal{E}^8 = \mathcal{E}^6+\mathcal{E}^2-I = 3\mathcal{E}^2-2-2I = 4\mathcal{E}^2-3I$

$\mathcal{E}^{2n} = n\cdot\mathcal{E}^2-(n-1)I$

$n=1$

$\mathcal{E}^2 = 1\cdot\mathcal{E}^2-(1-1)I$ Ισχύει

Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n=k$, δηλαδή

$\mathcal{E}^{2k} = k\cdot\mathcal{E}^2-(k-1)\cdot\mathcal{E}$

δ.ο: $\mathcal{E}^{(2k+1)} = (k+1)\mathcal{E}^2-k\cdot I$

$\mathcal{E}^{2(k+1)} = \mathcal{E}^{2k}+\mathcal{E}^2-I$ (προηγούμενη πρόταση)

$= k\cdot\mathcal{E}^2-(k-1)\cdot I+\mathcal{E}^2-I$

$= (k+1)\mathcal{E}^2-k\cdot I$

Άρα ισχύει $\mathcal{E}^{2n} = n\cdot\mathcal{E}^2-(n-1)\cdot I$ για κάθε n

Άρα $\mathcal{E}^{100} = 50\mathcal{E}^2-49I$

Φυλλάδιο #3

24/3/16

Άσκηση: Βρείτε πίνακες X και Y τέτοιους ώστε

$$X^2 = Y^3 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

~ Ένας πίνακας $A \in K^{n\times n}$ είναι διαγωνιοποιήσιμος αν:

i) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $X_A(x)$ του A είναι γινόμενο πρωτοβαθμίων διωνύμων

$$X_A(x) = (-1)^n (x-\lambda_1)^{n_1}(x-\lambda_2)^{n_2} \ldots (x-\lambda_n)^{n_k} \quad \lambda_i \neq \lambda_j$$

ii) $\underset{\text{γεωμετρική πολ.}}{\dim V(\lambda_i)} = n_i \leftarrow$ αλγεβρική πολλαπλότητα ~

1)

$$X_A(x) = \det\begin{pmatrix} 9-x & 0 & 0 \\ -5 & 4-x & 0 \\ -8 & 0 & 1-x \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 9-x & 0 & 0 \\ -5 & 4-x & 0 \\ -8 & 0 & 1-x \end{vmatrix} =$$

$$= (9-x)(4-x)(1-x) = -(x-9)(x-4)(x-1)$$

2) Ιδιοτιμές 9, 4, 1

$\dim V(\lambda_i) = n_i$

Θεώρημα: Ισχύει πάντα

$1 \leq \dim V(\lambda_i) \leq n_i$

Αν $n_i = 1$ (αλγεβρική πολλαπλότητα) τότε $1 \leq \dim V(\lambda_i) \leq 1$

$\dim V(\lambda_i) = 1$

Παρατήρηση: Αν ένας πίνακας έχει ακριβώς n διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές, τότε είναι διαγωνίσιμος.

$$V(9)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \middle| (A-9I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}9-9 & 0 & 0\\-5 & 4-9 & 0\\-8 & 0 & 1-9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 0 & 0 & 0\\-5 & -5 & 0 & 0\\-8 & 0 & -8 & 0\end{array}\right)\xrightarrow[r_3/-8]{r_2/-5}\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 0 & 0 & 0\\1 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{r_2 \to r_2 - r_1}$$

άρα 7 περίμετρο... $0\ 0\ 0$
έχω βρει 1, θα
κάνει λάθος πράξη

$$\xrightarrow{}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 0\\0 & -1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \qquad \begin{aligned}x+y&=0\\y-z&=0\\z&=t\end{aligned} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned}x&=-t\\y&=t\\z&=t\end{aligned}$$

Άρα $V(9)=\left\{\begin{pmatrix}-t\\t\\t\end{pmatrix} \middle| t\in \mathbb{R}\right\}=\left\{t\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \middle| t\in \mathbb{R}\right\}=$

$$=\left\langle \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V(4)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \middle| (A-4I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}9-4 & 0 & 0\\-5 & 4-4 & 0\\-8 & 0 & 1-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|c}5 & 0 & 0 & 0\\-5 & 0 & 0 & 0\\-8 & 0 & -3 & 0\end{array}\right)\xrightarrow[r_2/-5]{r_1/5}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 0\\-8 & 0 & -3 & 0\end{array}\right)\xrightarrow[r_3 \to r_3+8r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & -3 & 0\end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \qquad \begin{aligned}x&=0\\z&=0\\y&=t\end{aligned} \rightarrow \begin{aligned}x&=0\\y&=t\\z&=0\end{aligned}$$

$$V(4)=\left\{\begin{pmatrix}0\\t\\0\end{pmatrix} \middle| t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$V(1)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \middle| (A-I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}9-1&0&0\\-5&4-1&0\\8&0&1-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}8&0&0&0\\-5&3&0&0\\-8&0&0&0\end{array}\right)\rightsquigarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\-5&3&0&0\\-8&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_3\to r_3+8r_1]{r_2\to r_2+5r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\qquad\begin{aligned}x&=0\\y&=0\\z&=t\end{aligned}$$

ο πίνακας στην κανονική βάση!

$$[L_A]_\alpha^\alpha=[I]_\varepsilon^\alpha\,[L_A]_\varepsilon^\varepsilon\,[I]_\alpha^{\varepsilon}\qquad \varepsilon=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{pmatrix}9&0&0\\0&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9&0&0\\-5&4&0\\-8&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\qquad\alpha=\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\kappa\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\kappa\\\kappa+\lambda\\\kappa+\mu\end{pmatrix}\qquad\begin{aligned}-\kappa&=1\\\kappa+\lambda&=0\\\kappa+\mu&=0\end{aligned}\qquad\begin{aligned}\kappa&=-1\\\lambda&=1\\\mu&=1\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}3&2&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}9&0&0\\0&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}}_{P^{-1}}A\underbrace{\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}}_{P}$$

$$P\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}\cdot P\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}=P\cdot\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}^2\cdot P^{-1}=A$$

άρα $\left(P\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot P^{-1}\right)^2=A$

Άρα $X=\left(P\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}\right)$

$$\begin{pmatrix}\sqrt[3]{9}&0&0\\0&\sqrt[3]{4}&0\\0&0&1\end{pmatrix}^3$$

$$P\begin{pmatrix}\sqrt[3]{9}&0&0\\0&\sqrt[3]{4}&0\\0&0&1\end{pmatrix}^3\cdot P^{-1}=P\cdot P^{-1}\cdot A\cdot P\cdot P^{-1}$$

$$P\begin{pmatrix}\sqrt[3]{9}&0&0\\0&\sqrt[3]{4}&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}=\underbrace{P\cdot P^{-1}}\cdot A\cdot \underbrace{P\cdot P^{-1}}$$

$$P\cdot\begin{pmatrix}\sqrt[3]{9} & 0 & 0\\ 0 & \sqrt[3]{4} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}P^{-1}\cdot P\begin{pmatrix}\sqrt[3]{9} & 0 & 0\\ 0 & \sqrt[3]{4} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}P^{-1}\cdot P\begin{pmatrix}\sqrt[3]{9} & 0 & 0\\ 0 & \sqrt[3]{4} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix}\sqrt[3]{9} & 0 & 0\\ 0 & \sqrt[3]{4} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$= A$$